

Prof. Dr. Alfred Toth

Zu einer semiotischen Zahlentheorie I

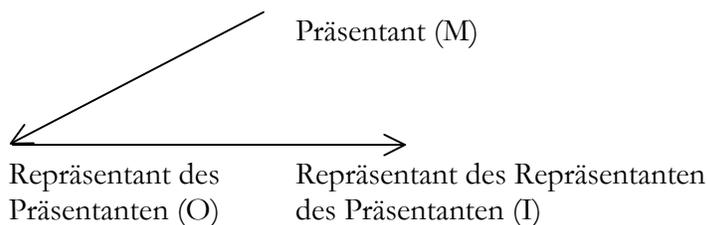
1. Wie die Mathematik, so kann auch die Semiotik auf der Basis von Zahlen, Mengen oder Kategorien eingeführt werden. Wir geben im folgenden die Peano-Axiome, wobei \mathbf{N} für die Menge der natürlichen Zahlen, N für die Nachfolgefunktion stehe und 0 ein Element (die Null) ist (Oberschelp 1976, S. 14):

- P1: $0 \in \mathbf{N}$.
- P2: $x \in \mathbf{N} \Rightarrow N(x) \in \mathbf{N}$.
- P3: $x \in \mathbf{N} \Rightarrow N(x) \neq 0$.
- P4: $x, y \in \mathbf{N} \wedge x \neq y \Rightarrow N(x) \neq N(y)$.
- P5: $0 \in A \wedge \forall x (x \in \mathbf{N} \wedge x \in A \Rightarrow N(x) \in A) \Rightarrow \forall x (x \in \mathbf{N} \Rightarrow x \in A)$.

In umgangssprachlicher Formulierung:

- P1: Null ist eine natürliche Zahl.
- P2: Der Nachfolger jeder natürlichen Zahl ist eine natürliche Zahl.
- P3: Null ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
- P4: Zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger.
- P5: Wenn eine Menge die Zahl Null enthält und mit jeder natürlichen Zahl auch deren Nachfolger, so enthält sie jede natürliche Zahl.

Bense hatte nun festgestellt, dass mit der Nachfolgefunktion N die semiotische Generierung korrespondiert: "Wir gehen dabei davon aus, dass die triadische Zeichenrelation $Z = R (M, O, I)$, wie wir entwickelten, als generatives Repräsentationsschema steigender Semiotizität betrachtet werden kann. In der universalkategorischen Konzeption stellt es sich mit Peirce bekanntlich als generierende Relation des Überganges von der 'Erstheit' zur 'Zweitheit' zur 'Drittheit' dar und damit im Sinne eines durch drei Ordinalzahlen festgelegten Repräsentationsschemas als eine generalisierte Nachfolgerrelation (bzw. Nachfolgefunktion) [...]. Als Graphenschema kann man für diesen Zeichenprozess folgendes angeben" (Bense 1975, S. 170 f.):



Damit formuliert Bense 4 semiotische Peano-Axiome (SP) unter Auslassung von P5 (denn die Peircesche Zeichenrelation hat ja nur drei Glieder) wie folgt (1975, S. 171):

- SP1: Der Präsentant ist ein Repräsentant.

- SP2: Der Repräsentant eines Repräsentanten ist ein Repräsentant.
- SP3: Der Präsentant ist nicht Repräsentant eines Repräsentanten.
- SP4: Es gibt keine zwei [Re-]Präsentanten mit dem gleichen Repräsentanten.

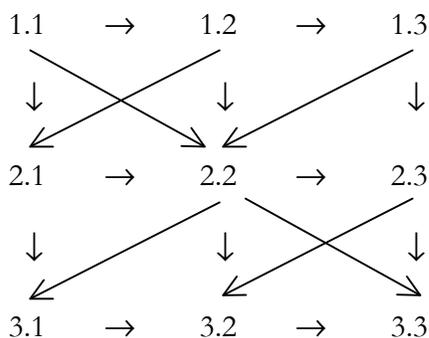
In seinem Kapitel "Über die Axioms of Number von Ch. S. Peirce" ist Bense später (1983, S. 192 ff.) noch einmal auf die Peano-Axiome zurückgekommen, welche Peirce bereits 1881, also fast zwanzig Jahre vor Peano, formuliert hatte, und zwar in der folgenden umgangssprachlichen Gestalt:

- AN1: 1 ist eine natürliche Zahl.
- AN2: Jede natürliche Zahl besitzt eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl als "Nachfolger".
- AN3: 1 ist nicht der Nachfolger einer natürlichen Zahl.
- AN4: Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger.
- AN5: Eine Eigenschaft, die der 1 zukommt und mit jeder natürlichen Zahl auch ihrem Nachfolger, kommt allen natürlichen Zahlen zu.

Bense vermutet, dass "es Peirce in seinem System der 'Axioms of Number' um den indirekten (d.h. im System nicht zugestanden) Versuch einer Anwendung der triadischen Zeichenkonzeption" ging, d.h. also, dass bereits Peirce die Einführung der natürlichen Zahlen und das Prinzip der vollständigen Induktion mit der erst später von Bense explizit eingeführten Operation der Generierung (" \Rightarrow ") von Zeichen parallelisierte und daher selbst schon die Grundlagen für eine zahlentheoretische Semiotik gelegt hatte.

2. Die Verhältnisse zwischen Zahl und Zeichen sind jedoch viel verwickelter, denn die Primzeichen der Erstheit, Zweitheit und Drittheit (.1., .2., .3.) müssen ja kartesisch zu Subzeichen (1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 3.3) multipliziert werden, damit Zeichenklassen und Realitätsthematiken gebildet werden können, die erst semiotische Analoga zu Zahlen darstellen: Bense selbst hatte zur semiotische Repräsentation der "Zahl an sich" die eigenreale Zeichenklasse (3.1 2.2 1.3) bestimmt (Bense 1992, S. 16).

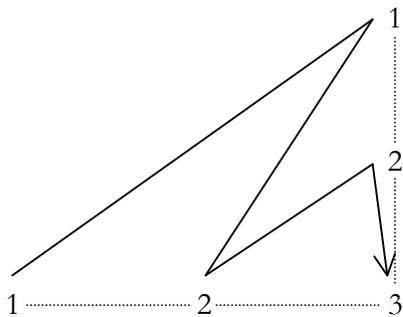
Damit erhalten wir folgende nicht-lineare Zeichen-Zahlen-Folge:



In den Spalten, welche den triadischen Semiosen entsprechen, stehen also die rein iterativen und in den Zeilen, welche den trichotomischen Semiosen entsprechen, die rein akkretiven Zeichen-Zahlen.

Jeder rein iterativen Zeichen-Zahl entsprechen also 3 iterativ-akkretive Zeichen-Zahlen, wobei die Hauptdiagonale, d.h. die Genuine Kategorienklasse (3.3 2.2 1.1), solche Zeichen-Zahlen enthält, deren akkretive und iterative Werte identisch sind, und die Nebendiagonale, d.h. die eigenreale Zeichenklasse (3.1 2.2 1.3), solche Zeichen-Zahlen, deren Glieder zueinander gruppentheoretisch invers sind, wobei als semiotisches Einselement die Zweitheit (.2.) fungiert (vgl. Toth 2007, S. 36 ff.).

Nun stellt die Semiotik ein "Tripel-Universum" dar, bestehend aus den drei Universen der Erstheit, Zweitheit und Drittheit (Bense 1986, S. 17 ff.), weshalb man die drei Universen auch als semiotische Kontexturen einführen und im obigen Diagramm die horizontalen Pfeile als Repräsentanten der intra-kontexturalen und die vertikalen sowie diagonalen Pfeile als Repräsentanten der inter-kontexturalen semiotischen Übergänge (Transitionen und Transgressionen) auffassen kann. Die 9 Subzeichen der kleinen semiotischen Matrix lassen sich demnach als Ausschnitt der von Günther stammenden und von Kronthaler (1986, S. 31) reproduzierten zweidimensionalen Darstellung polykontexturaler Zahlen darstellen:

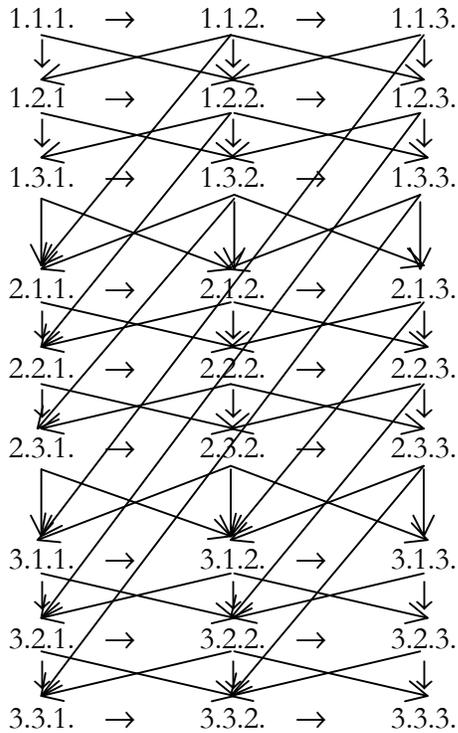


Die Zeichen-Zahlen sind demnach wie die polykontexturalen Zahlen zweidimensionale (flächige) Zahlen und erlauben wie jene Rossers "sideward move", durch welchen der den Peano-Zahlen entsprechenden Primzahlen eine Feinstruktur verliehen wird, die mit Hilfe topologischer Faserung entsprechend den polykontxturalen Zahlen beschrieben werden kann (vgl. Kronthaler 1986, S. 77 ff.).

3. Geht man statt von der kleinen von der grossen semiotischen Matrix aus und setzt man Zeichenklassen durch jeweils 3 Subzeichen pro triadischen Bezug zusammen (vgl. Steffen 1982), so erhält man dreidimensionale (räumliche) Zeichen-Zahlen wie etwa in dem folgenden Beispiel, in dem die triadisch-trichotomischen Hauptwerte unterstrichen sind:

$$((\underline{3.2} \ 3.3 \ 3.1) (\underline{2.2} \ 2.3 \ 2.1) (\underline{1.2} \ 1.3 \ 1.1)) \times ((\underline{2.1} \ 3.1 \ 1.1) (\underline{2.2} \ 3.2 \ 1.2) (\underline{2.3} \ 3.3 \ 1.3))$$

Eine weitere interessante und weiter zu verfolgende Möglichkeit, statt mit Kombinationen von dyadischen Subzeichen mit Kombinationen von monadischen Primzeichen dreidimensionale Zeichenzahlen zu konstruieren, findet man in Stiebing (1978, S. 77). Notiert man Stiebing's System gemäss den Prinzipien unseres obigen Diagramms, erhält man:



Damit stellt sich weiter auch das Problem des Verhältnisses von Zeichen-Zahlen zu Peano-Zahlen einerseits und zu Proto-, Deutero- und Trio-Zahlen andererseits sowie die daraus hervorgehende Frage, in welchem Verhältnis die Subzeichen als akkretiv-iterative Zahlen, die ja nicht ohne qualitativen Verlust auf die Peano-Folge abbildbar sind, zu den Proto-, Deutero- und Trio-Zahlen stehen (vgl. Toth 2003, S. 54 ff.).

Literatur

- Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975
 Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1983
 Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992
 Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986
 Oberschelp, Arnold, Aufbau des Zahlensystems. 3. Aufl. Göttingen 1976
 Steffen, Werner, Der Iterationsraum der Grossen Matrix. In: Semiosis 25/26, 1982, S. 55-70
 Stiebing, Hans Michael, Zusammenfassungs- und Klassifikationsschemata von Wissenschaften und Theorie auf semiotischer und fundamentalkategorialer Basis. Diss. Stuttgart 1978
 Toth, Alfred, Die Hochzeit von Semiotik und Struktur. Klagenfurt 2003
 Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2007

©2008, Prof. Dr. Alfred Toth